Click to prove you're human

Metodo da rigidez direta exercicios resolvidos

100%(1)100% acharam este documento útil (1 voto)574 visualizações1) O documento apresenta exercícios de análise estrutural utilizando o método da rigidez direta para diferentes estruturas (subsolo de pavimento, arquibancada de estádio, viga contínua). 2…Título e descrição aprimorados por IASalvarSalvar EXERCÍCIOS DE ANÁLISE MATRICIAL DAS ESTRUTURAS para ler mais tarde100%100% acharam este documento útil, undefined ORIENTAÇÃO PARA A VF 2019 (novo!) Share — copy and redistribute the material in any medium or format for any purpose, even commercially. Adapt — remix, transform, and build upon the material for any purpose, even commercially. The licensor cannot revoke these freedoms as long as you follow the license terms. Attribution — You must give appropriate credit , provide a link to the license, and indicate if changes were made . You may do so in any reasonable manner, but not in any way that suggests the licensor endorses you or your use. ShareAlike — If you remix, transform, or build upon the material, you must distribute your contributions under the same license as the original. No additional restrictions — You may not apply legal terms or technological measures that legally restrict others from doing anything the license permits. You do not have to comply with the license for elements of the material in the public domain or where your use is permitted by an applicable exception or limitation . No warranties are given. The license may not give you all of the permissions necessary for your intended use. For example, other rights such as publicity, privacy, or moral rights may limit how you use the material. Prévia do material em textoO método da rigidez direta 1 Módulo 1 ››› Mão na massa Questão 1 A alternativa A está correta. Comentário: Comparando as ações nodais com o sistema de coordenadas de referência, temos as seguintes correspondências: Em A: 0; Em B: 10kN Em C: 10kN Em D: 0 Em E: 10kNm Em F: 0 Juntando tudo, temos o vetor {R}={0 10 10 0 10 0}. Questão 2 A alternativa B está correta. Comentário: Comparando as ações nodais com o sistema de coordenadas de referência, temos as seguintes correspondências: Em A: 0 Em B: 10kN Em C: 15kNm Em D: 10kN Em E: 10kN Em F: 10kNm O método da rigidez direta 2 Juntando tudo, temos o vetor {R}={0 10 15 10 10 10}. Questão 3 A alternativa C está correta. Comentário: Comparando as ações nodais com o sistema de coordenadas de referência, temos as seguintes correspondências: Em A: 10kNm Em B: 15kNm Juntando tudo, temos o vetor {R}={10 kNm,15 kNm}. Questão 4 A alternativa A está correta. Comentário: Comparando as ações nodais com o sistema de coordenadas de referência, temos as seguintes correspondências: Em A: 10kNm; Em B: -15kNm Juntando tudo, temos o vetor {R}={10 kNm,-15 kNm}. Questão 5 A alternativa E está correta. Comentário: Comparando as ações nodais com o sistema de coordenadas de referência, temos as seguintes correspondências: Em A: 0,37rad; Em B: -0,18rad O método da rigidez direta 3 Em C: -0,18rad Em D: 0,09rad Em E: 0,09rad Em F: -0,46rad Juntando tudo, temos o vetor {r}={0,37-0,18-0,18 0,09 0,09-0,46}. Questão 6 A alternativa C está correta. Comentário: Como sugerido no enunciado, apliquemos uma carga unitária na coordenada global 1. Coordenadas globais. Elaboração do autor. E aí o vetor {R} se torna: {RR} = ››› 0 1 1 0 ››› Mas, se fizermos o vetor {S} de coordenadas locais sob as mesmas condições, então passamos a ter: Coordenadas locais. Elaboração do autor. {SS} = ››› 0 1 1 0 ››› O método da rigidez direta 4 A combinação desses dois vetores é {} = ››› ›››; {} = ››› ›››. ››› Teoria na Prática Questão 1 Comentário: Assista ao vídeo disponibilizado para ver a solução. ››››››››››› Verificando o aprendizado Questão 1 A alternativa E está correta. Comentário: Elementos que são sujeitos apenas a cargas axiais e sem momentos fletores nem torsores são geralmente representativos de treliças. Questão 2 A alternativa A está correta. Comentário: Na figura mostrada, temos um sistema de coordenadas locais com quatro coordenadas. O método da rigidez direta 5 Módulo 2 ››› Mão na massa Questão 1 A alternativa B está correta. Comentário: Os momentos de fixação da viga biengastada correspondem aos momentos de engastamento perfeito da mesma viga. Olhando a tabela de momentos e reações de fixação, temos esta imagem: Elaboração do autor. Vemos que os momentos de fixação são dados por: Essa expressão pode ser obtida por outros métodos analíticos de resolução de vigas biengastadas, como o método das forças e o método dos deslocamentos. O método da rigidez direta 6 Questão 2 A alternativa D está correta. Comentário: Os momentos de fixação da viga biengastada correspondem aos momentos de engastamento perfeito da mesma viga. Olhando a tabela de momentos e reações de fixação, vemos que o momento de fixação no apoio da esquerda é dado por e que o momento de fixação no apoio da direita é dado por . Essas expressões podem ser obtidas por outros métodos analíticos de resolução de vigas biengastadas, como o método das forças e o método dos deslocamentos. A combinação dos dois resultados corresponde à: ; . Questão 3 A alternativa D está correta. Comentário: Os momentos de fixação da viga biengastada correspondem aos momentos de engastamento perfeito da mesma viga. Olhando a tabela de momentos e reações de fixação, vemos que o esforço de fixação no apoio da esquerda é dado por: (+) Se b = 3a , então temos: (+) = ()(+) = Essas expressões podem ser obtidas por outros métodos analíticos de resolução de vigas biengastadas, como o método das forças e o método dos deslocamentos. O método da rigidez direta 7 Questão 4 A alternativa C está correta. Comentário: Os momentos de fixação da viga biengastada correspondem aos momentos de engastamento perfeito da mesma viga. Olhando a tabela de momentos e reações de fixação, vemos que os momentos são dados por: e Se L = 6m e q = 10kN, então temos: • Para o engaste da esquerda: = = • Para o engaste da direita: = = Essas expressões podem ser obtidas por outros métodos analíticos de resolução de vigas biengastadas, como o método das forças e o método dos deslocamentos. Questão 5 A alternativa E está correta. Comentário: O coeficiente de rigidez kij representa a força na direção i causada por um deslocamento unitário j (enquanto todos os outros deslocamentos são impostos como nulos). Aplicando a relação tensão-deformação e o deslocamento unitário, temos: = *EEEE FF AA* = *EE* Δ*ll ll* Isolando F, temos: = ››› ›››. O método da rigidez direta 8 Questão 6 A alternativa B está correta. Comentário: As cargas P são aplicados nos pontos L/3 e 2L/3 referentes à viga. Pode-se dizer então que L = 3a. Os momentos de fixação da viga biengastada correspondem aos momentos de engastamento perfeito da mesma viga. Olhando a tabela de momentos e reações de fixação, vemos que os momentos são dados iguais a *PPPP* (*LL*−*PP*) *LL* . Se L = 3a e substituindo na expressão, temos: *PPPP* (*LL* − *PP*) *LL* = *PPPP* (2*PP*) 3*PP* = 2*PPPP* 3 Essas expressões podem ser obtidas por outros métodos analíticos de resolução de vigas biengastadas, como o método das forças e o método dos deslocamentos. ››› Teoria na Prática Questão 1 Comentário: Assista ao vídeo disponibilizado para ver a solução. ››››››››››› Verificando o aprendizado Questão 1 A alternativa C está correta. Comentário: Vemos que cada reação de fixação em cada engaste é dada por P. O método da rigidez direta 9 Questão 2 A alternativa E está correta. Comentário: A quantidade que representa o deslocamento na direção i causada por uma ação de valor unitário j, ou seja, que relaciona o deslocamento a uma ação, é chamado de coeficiente de flexibilidade, em oposição ao coeficiente de rigidez. Módulo 3 ››› Mão na massa Questão 1 A alternativa D está correta. Comentário: Após consulta à tabela de matrizes de rigidez de elementos, veremos facilmente que a matriz de rigidez elementar referente ao elemento anterior é dada por: ››› ›››. Questão 2 A alternativa E está correta. Comentário: A matriz de rigidez elementar referente ao elemento é dada por: ⎣⎢⎢⎢⎢⎡ *EEAA LL* 0 0 0 − *EEAA LL* 0 0 0 − *EEAA LL* 0 0 0 *EEAA LL* 0 0 0 ⎦⎥⎥⎥⎥⎤ Substituindo os valores, tem-se que: O método da rigidez direta 10 . ›››, −, −, , ››› Multiplicando os valores, vemosque essa expressão é numericamente igual a . ››› − − ››› Questão 3 A alternativa B está correta. Comentário: Consultando a tabela de matrizes de rigidez de elementos, vemos que a matriz de rigidez elementar, com momento de inércia igual a J, é igual a: *EEEE LL*3 ››› 12 −6*LL* −6*LL* 4*LL*2 ››› Questão 4 A alternativa C está correta. Comentário: Apliquemos uma carga unitária na coordenada global 1. O vetor {R} se torna: {RR} = ›››01››› Mas, com o vetor {s} de coordenadas locais, passamos a ter: {SS} = ⎣⎢⎢⎡ ⎣⎢⎡ 0 0 1 0 0 0⎦⎥⎤ ⎣⎢⎡ 0 0 0 1 0 0 ⎦⎥⎤ ⎦⎥⎥⎤ Formando a matriz [B], temos que ela é igual à seguinte. [BB] = ⎣⎢⎢⎢⎡ ⎣⎢⎡ 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0⎦⎥⎤ ⎦⎥⎥⎥⎤ Questão 5 A alternativa C está correta. Comentário: Apliquemos um deslocamento unitário na coordenada global 1. O vetor {r} se torna: {rr} = ›››01››› Mas, com o vetor {s} de deslocamentos nas coordenadas locais, passamos a ter: {ss} = ⎣⎢⎢⎡ ⎣⎢⎡ 0 0 0 1 0 0 ⎦⎥⎤ ⎦⎥⎥⎤ O método da rigidez direta 12 Formando a matriz [A], temos que ela é igual à seguinte. [AA] = ⎣⎢⎢⎢⎡ ⎣⎢⎡ 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0⎦⎥⎤ ⎦⎥⎥⎥⎤ Questão 6 A alternativa D está correta. Comentário: Vamos nos lembrar da fórmula da matriz da estrutura integrada: [KK] = [AA]TT[$kkLL$][AA] Eis a matriz de compatibilidade cinemática que calculamos em um problema anterior: [AA] = ⎣⎢⎢⎢⎡ ⎣⎢⎡ 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0⎦⎥⎤ ⎦⎥⎥⎥⎤ Consultemos a tabela de matrizes de rigidez de elementos, sabendo que o elemento é o dado no desenho a seguir: Elaboração do autor. [K] = 2EI l ››› 2 11 2››› E aí montamos a matriz de rigidez: [$kkLL$] = ››› [$kk1ee$] ··· 0 ⋮ ⋮ ⋮ 0 ··· [$kk2ee$] ››› O método da rigidez direta 13 A fórmula da matriz da estrutura integrada é esta: [KK] = [AA]TT[$kkLL$][AA] Em seguida, montemos a equação para encontrar [KK]. [KK] = ⎣⎢⎢⎢⎡ ⎣⎢⎡ 0 00 0 1 0 0 1 0 0 0 0⎦⎥⎤ ⎦⎥⎥⎥⎤ TT ››› [$kk1ee$] ··· 0 ⋮ ⋮ ⋮ 0 ··· [$kk2ee$] ››› ⎣⎢⎢⎢⎡ ⎣⎢⎡ 0 00 0 1 0 0 1 0 0 0 0⎦⎥⎤ ⎦⎥⎥⎥⎤. Desenvolvendo a expressão, temos que: [KK] = *EEEE ll* ››› 2 1 1 2››› ››› Teoria na Prática Questão 1 Comentário: Assista ao vídeo disponibilizado para ver a solução. ››››››››››› Verificando o aprendizado Questão 1 A alternativa A está correta. Comentário: A matriz de rigidez é sempre inversa da matriz de flexibilidade, e somente dela. Também não é uma matriz quadrada nem uma matriz nula. Questão 2 A alternativa E está correta. O método da rigidez direta 14 Comentário: A matriz de compatibilidade cinemática relaciona o vetor de deslocamentos {s}, em função do vetor dos deslocamentos nodais {r}. Módulo 4 ››› Mão na massa Questão 1 A alternativa B está correta. Comentário: Para uma rotação de coordenadas de 45°, substituimos o ângulo na fórmula a seguir: [RR] = ››› cos 45° *ssssss* 45° 0 −*ssssss* 45° cos 45° 0 0 0 1 ››› Desenvolvendo a matriz chegamos a: [] = ⎣⎢⎢⎢⎡ √ √ − √ √ ⎦⎥⎥⎥⎤ Questão 2 A alternativa C está correta. Comentário: Para uma rotação de coordenadas de 60°, substuimos o ângulo na fórmula a seguir: [RR] = ››› cos 60° *ssssss* 60° 0 −*ssssss* 60° cos 60° 0 0 0 1 ››› Desenvolvendo a matriz chegamos a: O método da rigidez direta 15 [] = ⎣⎢⎢⎢⎡ √ − √ ⎦⎥⎥⎥⎤ Questão 3 A alternativa C está correta. Comentário: A matriz de rigidez elementar, com momento de inércia igual a I, é igual a: Elaboração do autor. [$kkee$] = *EEEE* ⎣⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎡ 12 *LL*3 6 *LL*2 6 *LL*2 4 *LL* − 12 *LL*3 6 *LL*2 − 6 *LL*2 2 *LL* − 12 *LL*3 − 6 *LL*2 6 *LL*2 2 *LL* 12 *LL*3 − 6 *LL*2 − 6 *LL*2 4 *LL* ⎦⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎤ Se a matriz de rigidez da estrutura pode ser montada desta forma: [$kkLL$] = ››› [$kk1ee$] ··· 0 ⋮ ⋮ ⋮ 0 ··· [$kk2ee$] ››› O método da rigidez direta 16 Então, comparando as matrizes, vemos que a formação correta da matriz de rigidez da estrutura é: [] = ⎣⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎡ − − − − − − ⎦⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎤ Questão 4 A alternativa C está correta. Comentário: Consultemos inicialmente a tabela de matrizes de rigidez de elementos, sabendo que o elemento é dado no desenho a seguir: Elaboração do autor. [KK] = 2*EEEE ll* ››› 2 1 1 2››› Vamos montar então a matriz de compatibilidade cinemática, que será dada por: [AA] = ››› 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 ››› E aí montamos a matriz de rigidez: [$kkLL$] = ››› [$kk1ee$] ··· 0 ⋮ ⋮ ⋮ 0 ··· [$kk2ee$] ››› O método da rigidez direta 17 Calculamos agora os dois elementos separadamente com suas matrizes de rigidez elementares, sabendo que possuem comprimentos diferentes: • Para o elemento 1 (L = 5): [KK] = 2*EEEE ll* ››› 2 1 1 2››› = 2*EEEE* 5 ››› 2 1 1 2››› • Para o elemento 2 (L = 10): [KK] = 2*EEEE ll* ››› 2 1 1 2››› = *EEEE* 5 ››› 2 1 1 2››› Como não há diferenças angulares entre as coordenadas locais dos dois elementos, [R] será igual à matriz identidade. Sendo assim, a fórmula da matriz da estrutura integrada é esta: [KK] = [AA]TT[$kkLL$][AA] Em seguida, montemos a equação para encontrar [KK]: [KK] = ››› 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 ››› TT ››› [$kk1ee$] ··· 0 ⋮ ⋮ ⋮ 0 ··· [$kk2ee$] ››› ››› 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 ›››. Sendo que [$kkLL$] se forma a seguir: [$kkLL$] = *EEEE* 5 ››› 4 2 0 0 2 4 0 0 0 0 0 0 2 1 1 2 ››› Desenvolvendo a expressão, temos que: [KK] = *EEEE* 5 ››› 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 ››› TT ››› 4 2 0 0 2 4 0 0 0 0 0 0 2 1 1 2 ››› ››› 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 ››› [KK] = *EEEE* 5 ››› 4 2 0 2 6 1 0 1 2 ››› O método da rigidez direta 18 Questão 5 A alternativa E está correta. Comentário: Vamos montar então a matriz de compatibilidade cinemática, que será dada por: [AA] = ››› 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 ››› E aí montamos a matriz de rigidez: [$kkLL$] = ››› [$kk1ee$] ··· 0 ⋮ ⋮ ⋮ 0 ··· [$kk2ee$] ››› Calculamos agora os dois elementos separadamente com suas matrizes de rigidez elementares, sabendo que possuem comprimentos diferentes: • Para o elemento 1 (L = 12 m): [KK] = 2*EEEE ll* ››› 2 1 1 2››› = *EEEE* 6 ››› 2 1 1 2››› • Para o elemento 2 (L = 16 m): [KK] = 2*EEEE ll* ››› 2 1 1 2››› = *EEEE* 8 ››› 2 1 1 2››› Como não há diferenças angulares entre as coordenadas locais dos dois elementos, [R] será igual à matriz identidade. Sendo assim, a fórmula da matriz da estrutura integrada é esta: [KK] = [AA]TT[$kkLL$][AA] Em seguida, montemos a equação para encontrar [KK]: [KK] = ››› 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 ››› TT ››› [$kk1ee$] ··· 0 ⋮ ⋮ ⋮ 0 ··· [$kk2ee$] ››› ››› 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 ›››. Sendo que [$kkLL$] se forma a seguir: [$kkLL$] = *EEEE* 24 ››› 8 4 0 0 4 8 0 0 0 0 0 0 6 3 3 6 ››› Desenvolvendo a expressão, temosque: O método da rigidez direta 19 [KK] = *EEEE* 24 ››› 8 4 0 4 14 3 0 3 6 ››› Questão 6 A alternativa B está correta. Comentário: Separando a arquibancada em duas barras, vamos calcular a matriz de rigidez de cada um dos dois elementos a seguir. Elemento 1: pilar vertical, com inclinação α = 90°: [$kkEE$1] = ⎣⎢⎢⎢⎡ 120 6 0 0 0 12XX6 63 − 6XX6 62 0 − 6XX6 62 4XX6 6 ⎦⎥⎥⎥⎤ XX104 = ››› 20 0 0 0 1 3 −1 0 −1 4 ››› XX104 Matriz de rotação, com α = 90: [RR] = ››› cos 90° *ssssss* 90° 0 −*ssssss* 90° cos 90° 0 0 0 1 ››› = ››› 0 1 0 −1 0 0 0 0 1 ››› Calculando a matriz [$KKGG$] para o primeiro elemento: [$KKGG$] = [RR]TT[$KKee$][RR] [$KKGG$1] = ››› 0 1 0 −1 0 0 0 1 ››› TT ››› 20 0 0 0 1 3 −1 0 −1 4 ››› xx104xx ››› 0 1 0 −1 0 0 0 1 ››› = 104xx ››› 1 3 0 1 0 20 0 1 0 4 ››› Elemento 2: pilar inclinado, com cos α = - 0,8 e sen α = -0,6: [$kkEE$1] = ⎣⎢⎢⎢⎢⎡ 120 10 0 0 0 12XX6 103 − 6XX6 102 0 − 6XX6 102 4XX6 10 ⎦⎥⎥⎥⎥⎤ XX104 = ››› 12 0 0 0 0,072 −0,36 0 −0,36 2,4 ›››XX104 Matriz de rotação, com cos α = - 0,8 e sen α = -0,6: O método da rigidez direta 20 [RR] = ››› −0,8 0,6 0 −0,6 −0,8 0 0 0 1 ››› Calculando a matriz [$KKGG$] para o segundo elemento: [$KKGG$] = [RR]TT[$KKee$][RR] [$KKGG$2] = ››› −0,8 0,6 0 −0,6 −0,8 0 0 0 1 ››› TT ››› 12 0 0 0 0,072 −0,36 0 −0,36 2,4 ››› xx104xx ››› −0,8 0,6 0 −0,6 −0,8 0 0 0 1 ››› = 104xx ››› 7,71 −5,73 0,22 −5,73 4,37 0,29 0,22 0,29 2,40 ››› Somando as duas matrizes de rigidez dos dois elementos, temos: [$KKGG$] = 104xx ››› 8,04 −5,73 1,22 −5,73 24,37 0,29 1,22 0,29 6,40 ››› ››› Teoria na Prática Questão 1 Comentário: Assista ao vídeo disponibilizado para ver a solução. ››››››››››› Verificando o aprendizado Questão 1 A alternativa D está correta. Comentário: Para uma rotação de coordenadas de 120°, substuimos o ângulo na fórmula DMF: [RR] = ››› cos 120° *ssssss* 120° 0 −*ssssss* 120° cos 120° 0 0 0 1 ››› O método da rigidez direta 21 Desenvolvendo a matriz chegamos a: [] = ⎣⎢⎢⎢⎡ − √ √ ⎦⎥⎥⎥⎤ Questão 2 A alternativa D está correta. Comentário: A acumulação das matrizes de rigidez elementares na matriz de rigidez global pelos processos da rigidez direta, quando for necessária uma prévia transformação de coordenadas para o referencial global, é dada pela expressão seguinte: [$KKGG$] = ››› [RR]TT[$KKee$][RR] *nn eeeeeemm*=1 Em altaPrévia do material em textoO método da rigidez direta Prof. Giuseppe Miceli Junior Descrição Análise de um dos métodos matriciais de resolução de estruturas, o denominado método da rigidez direta. Propósito Apresentação do método da rigidez direta, um dos métodos da chamada análise matricial das estruturas, e os conceitos que permitem analisar estruturas mais complexas. O estudo do método da rigidez direta é de grande importância para o profissional/estudante, uma vez que permite resolver problemas estruturais de forma mais geral. Preparação Antes de iniciar o conteúdo, faça o download do Solucionário. Nele você encontrará o feedback das atividades. Certifique-se de ter acesso à calculadora científica a fim de repetir os cálculos apresentados e resolver os problemas propostos ao longo dos módulos. Objetivos Módulo 1 O modelo estrutural, seus dados e atributos Reconhecer o modelo estrutural, seus dados e atributos em uma análise matricial de estruturas. Módulo 2 Representação de carregamentos, ações e deslocamentos Reconhecer carregamentos, deslocamentos e ações em uma análise matricial de estruturas. Módulo 3 Montagem da matriz de rigidez global Analisar a matriz de rigidez geral de uma estrutura. Módulo 4 Processo de rigidez direta Aplicar o método da rigidez direta a uma estrutura no âmbito de uma análise matricial de estruturas. Introdução Neste vídeo, o especialista aborda os principais conceitos e aspectos sobre o método da rigidez direta. Vamos lá! 1 - O modelo estrutural, seus dados e atributos Ao ›nal deste módulo, você será capaz de reconhecer o modelo estrutural, seus dados e atributos em uma análise matricial de estruturas. Vamos começar! Como reconhecer e interpretar um modelo estrutural, seus dados e atributos. Neste vídeo, o especialista aborda os principais conceitos e aspectos que devem ser observados durante a leitura deste módulo. Vamos lá! O modelo estrutural Ao se projetar uma estrutura, o que se busca é determinar as forças internas, as forças de ligação e os deslocamentos da estrutura. Essa fase do processo é chamada de análise estrutural e seu objetivo principal é a determinação dos deslocamentos de todos os seus pontos, esforços internos solicitantes e as reações de apoio, com base nas características geométricas (como base, altura e espessura), mecânicas (como momento de inércia e módulo de elasticidade) e no conjunto de ações que atuam sobre ela. Os métodos de análise estrutural que conhecemos podem ser analíticos ou numéricos. Veja mais detalhes sobre esses métodos a seguir. A estrutura é inicialmente idealizada com uma montagem de elementos estruturais discretos com formas presumidas da distribuição de deslocamentos e tensões, e a solução completa é então obtida pela combinação dessa distribuição de deslocamentos e tensões de forma a gerar o equilíbrio de forças e a compatibilidade de deslocamentos nas junções desses elementos. A essa idealização que serviu de base para discretizar a estrutura e distribuir as tensões e deslocamentos nos elementos damos o nome de modelo estrutural. O modelo estrutural é formado pela montagem de diferentes elementos estruturais conectados entre si por ligações contínuas ou discretas. Entretanto, o mais importante nesse processo é a formulação de um modelo matemático de elementos discretos que equivalha à estrutura real. Busca-se então obter um sistema que possua um número finito de variáveis (graus de liberdade) que possibilite a sua resolução por meio de operações de álgebra linear e matricial. Métodos analíticos Métodos numéricos Os tipos de estruturas existentes dependem da composição de elementos estruturais básicos, classificados conforme a relação entre suas três dimensões intrínsecas (L1, L2 e L3). Sólido genérico. Agora veja mais detalhes sobre os principais elementos a seguir: Elemento de barra. Elemento de barra Uma das dimensões é muito maior que as outras duas. Exemplo clássico de um elemento de barra é a viga, conforme mostrado na imagem acima. Elemento de barra. Elemento de placa Duas das dimensões são bem semelhantes, mas são muito maiores que a outra, que sempre é a espessura. Quando a superfície é curva, no entanto, denomina-se elemento de casca. Um exemplo clássico de um elemento de placa é a laje, conforme mostrado na imagem acima. Elemento de bloco. Elemento de bloco As três dimensões possuem tamanhos semelhantes, conforme mostrado na imagem acima. Trata-se geralmente de peças de grandes estruturas. As estruturas são normalmente divididas em elementos estruturais individuais, sendo que cada peça é projetada para suportar carregamentos específicos, sejam eles permanentes, variáveis ou excepcionais, como vimos anteriormente. Dessa forma, é importante considerar o comportamento global da estrutura quando ela estiver submetida às cargas que lhe são impostas. Vamos conhecer agora outros conceitos importantes para a formação de um modelo estrutural. Nós Nós de uma estrutura reticulada são os pontos de interseção dos elementos estruturais básicos, assim como os pontos de apoio e as extremidades livres dos membros. Quando a estrutura está submetida a cargas, cada nó sofrerá deslocamentos sob a forma de translações e rotações, dependendo da configuração de estrutura. Apoios Apoios de uma estrutura podem ser frequentemente modelados como engastes, articulações (apoios do 2º gênero) e apoios móveis ou rótulas (apoios do 1º gênero). Tais ligações entre os membros e entre os membros e apoios podem ser ainda estáticas ou semirrígidas. Cargas As cargas são quaisquer ações mecânicas aplicadas sobre a estrutura. Podem ser forças concentradas, cargas distribuídas ou até binários (momentos aplicados sobre um ponto definido). Nas estruturas em geral, elementos estruturais, nós, apoios e cargas são organizados de modo a representar da melhor forma possível sua situação atual. Na análise estrutural, porém, podemos aproveitar o fato de esses elementos estarem conectados por nós para representar essa interação por meio de forças discretas (axiais ou cortantes), momentos (fletores ou torsores) ou deslocamentos (lineares ou angulares) nos nós comuns. A figura a seguir mostra um exemplo de como isso pode acontecer. À esquerda, estrutura íntegra ou “montada”. À direita, estrutura “desmontada”. Sistemas de coordenadas Para que sejam identificadas as ações mecânicas e os deslocamentos existentes nos nós de uma estrutura ou nas extremidades de um elemento isolado, a determinação de um sistema de coordenadas qualquer se torna importante para a ordenação matricial dessas ações, sejam forças ou momentos, e desses deslocamentos, sejam lineares ou angulares. Por exemplo, para a estrutura da imagem a seguir, submetida a determinado carregamento, escolheu-se inicialmente o sistema de coordenadas apresentado, de forma a ser possível assinalar as solicitações nos nós B, C e D. À esquerda, exemplo de estrutura; à direita, sistema de coordenadas arbitrário. A partir do sistema de coordenadas apresentado e das cargas a que a estrutura é submetida, define-se o vetor das ações nodais como: Rotacione a tela. Ao se aplicar o carregamento indicado, surgirão deslocamentos lineares e angulares na forma de uma linha elástica ou deformada. Surge então o vetor dos deslocamentos como: Deformações devidas ao carregamento proposto. Rotacione a tela. Se for escolhido outro sistema de coordenadas (como a seguir), podemos ter até outros vetores de ações e vetores de deslocamentos. Coordenadas globais. Por exemplo, o novo vetor de forças seria: {R} = ⎡⎢⎢⎣ −205−3 ⎤⎥⎥⎦ {r} = ⎡⎢⎢⎣ 0, 0050, 002−0, 0020, 003 ⎤⎥⎥⎦ Rotacione a tela. E o novo vetor de deslocamentos seria um vetor semelhante a esse, mas tendo como membros os deslocamentos na direção de cada uma dessas nove coordenadas. Poderíamos ter então: Rotacione a tela. Atenção! Quanto maior for o número de coordenadas utilizadas,maior será o número de respostas obtidas sobre o comportamento da estrutura. Ao sistema de coordenadas até aqui apresentado, que se caracteriza por se dispor ao longo de toda a estrutura, dá-se o nome de coordenadas globais. Pense agora na estrutura decomposta em elementos. Dessa forma, não será suficiente apenas definir coordenadas globais, pois é preciso definir elementos e deformações relativos a suas extremidades. Assim, barras de treliça plana só apresentam esforços e deformações axiais, podendo ter os sistemas de coordenadas apresentados a seguir: Exemplos de elementos de treliças planas. Uma barra representativa de viga, no entanto, pode ser considerada apenas com as solicitações transversais e de momentos nas extremidades. Assim, surgem mais estas três configurações possíveis: Exemplos de elementos de vigas. Os sistemas de coordenadas referentes aos elementos desmontados discretizados da estrutura são chamados de coordenadas locais. Para a análise da estrutura, pode ser importante a escolha de certos sistemas. No caso da barra da treliça, com esforços normais e axiais, pode ser mais vantajosa. No caso do elemento de viga, a existência de duas equações de equilíbrio leva a uma configuração com quatro coordenadas como a mais vantajosa. Dessa forma, para se calcular estruturas por meio da discretização em elementos, deve-se sempre convencionar dois sistemas de coordenadas: Coordenadas globais Para ações e deslocamentos nodais da estrutura. Coordenadas locais {R}T = { }−2 0 0 0 −5 0 0 0 3 {r}T = { }0, 005 −0, 001 0, 002 0, 004 −0, 002 −0, 001 0, 004 0, 001 0, 003 Para os esforços e deformações (deslocamentos) nos elementos da estrutura. Mão na massa Questão 1 O vetor de ações nodais relativo à estrutura a seguir, tendo como referência o sistema de coordenadas de referência {A B C D E F}, é dado por: Parabéns! A alternativa A está correta.

%A%20%20%20

matrizes de rigidez elementares que calculamos. Os elementos 1 e 3 possuem as seguintes matrizes de rigidez elementares (comprimento igual a L/2): Rotacione a tela. Os elementos 2 e 4 possuem as seguintes matrizes de rigidez elementares (comprimento igual a L): Rotacione a tela. Identifiquemos em cada matriz a correspondência dos graus de liberdade locais (por meio do número das linhas e das colunas) com os globais. Então temos: [kE] = EI L [ ]8 4 4 8 [kE] = EI L [ ]4 2 2 4 A partir da correspondência entre essas posições, vamos montar a matriz de rigidez direta global da estrutura somando as contribuições elementares: Na mesma situação, quando as coordenadas globais e locais não apresentam direções e sentidos iguais, deve-se realizar então uma transformação linear de coordenadas. Se a matriz [Rα] de transformação de coordenadas é dada por: Rotacione a tela. A acumulação das matrizes de rigidez elementares na matriz de rigidez global pelo processo da rigidez direta, quando for necessária uma prévia transformação de coordenadas para o referencial global, será calculada pela seguinte expressão: Rotacione a tela. Demonstração do método Veja a treliça plana a seguir: [Rα] = ⎡⎢ cos α sen α 0− sen α cos α 00 0 1⎤⎥⎦[KG] = n∑elem =1[R]T [Ke][R] Demonstração de método. Vamos então resolver essa estrutura passo a passo: Passo 1 Numere os nós e elementos no modelo analítico da estrutura. Este passo é importante porque ordenará todos os dados de agora em diante. Demonstração de método Passo 2 Numerar ainda os graus de liberdade da estrutura no referencial global, seguindo-se o número de nós de forma diferente que das condições de contorno. Demonstração de método. Passo 3 Escrever as equações de equilíbrio de cada elemento no referencial global. O elemento deve ser escolhido com cuidado: no presente caso, são elementos de treliça sujeitos a 4 graus de liberdade. Em seguida, calcular as matrizes de rotação e de rigidez local de cada barra Para o elemento número 1 Em que (a) é o elemento número 1 segundo as coordenadas globais, e (b) é o elemento número 1 segundo as coordenadas locais. Elemento 1. Para o cálculo de [R], α = 0°. Assim, temos: Rotacione a tela. Para o cálculo de [KE], temos ainda a matriz de rigidez elementar referente ao elemento anterior, dada por: Rotacione a tela. Substituindo os valores, tem-se que: Rotacione a tela. Para o elemento número 2 Em que (a) é o elemento número 2 segundo as coordenadas globais, e (b) é o elemento número 1 segundo as coordenadas locais. Elemento 2. Para o cálculo de [R], sen α = 0,6 e cos α = - 0,8, temos: [Rα] = = ⎡⎢ cos α sen α 0 0− sen α cos α 0 00 0 cos α sen α0 0 − sen α cos α⎤⎥⎦ ⎡⎢1 0 0 00 1 0 00 0 1 00 0 0 1⎤⎥⎦⎡⎢ EAL 0 − EAL 00 0 0 0− EAL 0 EAL 00 0 0 0⎤⎥⎦EAL1 ⎡⎢ 1 0 −1 00 0 0−1 0 1 00 0 0 0⎤⎥⎦ Rotacione a tela. Para o cálculo de [KE], temos ainda a matriz de rigidez elementar referente ao elemento anterior, dada por: Rotacione a tela. Substituindo os valores, tem-se que: Rotacione a tela. Fazendo a transformação de coordenadas com a expressão seguinte: Rotacione a tela. Chegamos ao resultado para a matriz de rigidez global [KG] como: Rotacione a tela. Para o elemento número 3 Em que (a) é o elemento número 3 segundo as coordenadas globais, e (b) é o elemento número 3 segundo as coordenadas locais. Elemento 3. [Rα] = = ⎡⎢ cos α sen α 0 0− sen α cos α 0 00 0 cos α sen α0 0 − sen α cos α⎤⎥⎦ ⎡⎢⎣−0, 8 0, 6 0 0−0, 6 −0, 8 0 00 0 −0, 8 0, 60 0 −0, 6 −0, 8⎤⎥⎦⎡⎢ EAL 0 − EAL 00 0 0 0− EAL 0 EAL 00 0 0 0⎤⎥⎦EAL ⎡⎢ 1 0 −1 00 0 0−1 0 1 00 0 0 0⎤⎥⎦[KG] = n∑elem=1[R]T [Ke][R]EAL2 ⎡⎢ 0, 64 −0, 48 −0, 64 0, 48−0, 48 0, 36 0, 48 −0, 36−0, 64 0, 48 0, 64 −0, 480, 48 −0, 36 −0, 48 0, 36 ⎤⎥⎦ Para o cálculo de [R], α = 90°. Assim, temos: Rotacione a tela. Para o cálculo de [KE], temos ainda a matriz de rigidez elementar referente ao elemento anterior, dada por: Rotacione a tela. Substituindo os valores, tem-se que: Rotacione a tela. Passo 4 Montar as matrizes relacionando forças ({F}) aos deslocamentos ({u}), a partir da formação da matriz de rigidez [K] para cada elemento Rotacione a tela. Para o elemento número 1 Rotacione a tela. Para o elemento número 2 Rotacione a tela. [Rα] = = ⎡⎢ cos α sen α 0 0− sen α cos α 0 00 0 cos α sen α0 0 − sen α cos α⎤⎥⎦ ⎡⎢ 0 1 0 0−1 0 00 0 0 10 0 −1 0⎤⎥⎦⎡⎢ EAL 0 − EAL 00 0 0 0− EAL 0 EAL 00 0 0 0⎤⎥⎦EAL3 ⎡⎢0 0 0 00 1 0 −10 0 0 00 −1 0 1 ⎤⎥⎦{F} = [K]{u}= EAL1 = EA⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢F1F2F3F4⎤⎥ ⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢ 1 0 −1 00 0 0−1 0 1 00 0 0 0⎤⎥⎦⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢u1u2u3u4⎤⎥ ⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢ 0, 5 0 −0, 5 00 0 0−0, 5 0 0, 5 00 0 0 0⎤⎥⎦⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢u1u2u3u4⎤⎥ ⎡⎢⎤⎥ = EAL2 ⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢F3F4F5F6⎤⎥ ⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢ 0, 64 −0, 48 −0, 64 0, 48−0, 48 0, 36 0, 48 −0, 36−0, 64 0, 48 0, 64 −0, 480, 48 −0, 36 −0, 48 0, 36 ⎤⎥⎦⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢u3u4u5u6⎤⎥ ⎡⎢⎤⎥ Rotacione a tela. Para o elemento número 3 Rotacione a tela. Passo 5 Fazer o levantamento das contribuições das três matrizes de rigidez dos elementos. Para o elemento número 1 Veja: Para o elemento número 2 Para o elementonúmero 3 Passo 6 = EA ⎡⎢ 0, 256 −0, 192 −0, 256 0, 192−0, 192 0, 144 0, 192 −0, 144−0, 256 0, 192 0, 256 −0, 1920, 192 −0, 144 −0, 192 0, 144 ⎤⎥⎦⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢u3u4u5u6⎤⎥ ⎡⎢⎤⎥ = EAL3 = EA⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢F1F2F5F6⎤⎥ ⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢0 0 0 00 1 0 −10 0 0 00 −1 0 1 ⎤⎥⎦⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢u1u2u5u6⎤⎥ ⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢0 0 0 00 0, 667 0 −0, 6670 0 0 00 −0, 667 0 0, 667 ⎤⎥⎦⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢u1u2u5u6⎤⎥ ⎡⎢⎤⎥ A partir das contribuições de todos os elementos, forme um único sistema de equações de equilíbrio relativo à estrutura. Somando todas as combinações, temos o sistema a seguir, relacionando as forças aos deslocamentos por meio da matriz de rigidez. Rotacione a tela. Passo 7 Aplicar as condições de contorno referentes às reações de apoio e às forças nodais conhecidas que são nulas. Caso das reações de apoio F2= -20kN, F4= -45kN; F3= 0kN Caso dos deslocamentos U1= U5= U6 = 0 Dessa forma, o sistema anterior se torna: Rotacione a tela. Trata-se de um sistema de 6 equações com 6 incógnitas. Há vários processos de resolução que não serão discutidos aqui. Entretanto, com o auxílio de uma calculadora científica programável ou um computador, você poderá encontrar o resultado das seis variáveis dessas equações que completam o vetor de forças e o vetor dos deslocamentos do sistema. Assim, temos: Para as forças: Rotacione a tela. Para os deslocamentos: = EA ⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢F1F2F3F4F5F6⎤⎥ ⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢ 0, 5 0 −0, 5 0 0 00 0, 667 0 0 0 −0, 667−0, 5 0 0, 256 + 0, 5 −0, 192 −0, 256 0, 1920 0 −0, 192 0, 144 0, 192 −0, 1440 0 −0, 256 0, 192 0, 256 −0, 1920 −0, 667 0, 192 −0, 144 −0, 192 0, 144 + 0, 667⎤⎥⎦⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢U1U2U3U4U5U6⎤⎥ ⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢⎤⎥ = EA ⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢ F1−200−45F5F6 ⎤⎥ ⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢ 0, 5 0 −0, 5 0 0 00 0, 667 0 0 0 −0, 667−0, 5 0 0, 756 −0, 192 −0, 256 0, 1920 0 −0, 192 0, 144 0, 192 −0, 1440 0 −0, 256 0, 192 0, 256 −0, 1920 −0, 667 0, 192 −0, 144 −0, 192 0, 811 ⎤⎥⎦⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢ 0U2U3U400 ⎤⎥ ⎡⎢⎤⎥ = kN ⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢F1F2F3F4F5F6⎤⎥ ⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢⎤⎥ ⎡⎢ 60−200−45−6065 ⎤⎥ ⎡⎢⎤⎥ Rotacione a tela. Mão na massa Questão 1 Para uma rotação das coordenadas locais de um ângulo de 45°, a matriz [R] de transformação de coordenadas pode ser dada por: Parabéns! A alternativa B está correta. %0A%20%20%20